ECOLE SUPERIEURE de PLASTURGIE

ESP 99
OPTION SUP

CONCOURS D'ENTREE 1999 : Epreuve de MATHEMATIQUES

Durée : 4 Heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, dans les conditions définies dans la circulaire du 28 Juillet 1986.

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Les deux problèmes sont indépendants.

Problème d'algèbre.

Dans tout le problème, a désigne un réel avec $\frac{3}{4} \leq a < 1$.

Partie A: Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit v l'application de IR vers IR définie par $v(x) = x^3 - ax - (1 - a)$.

On considère l'équation (E): $v(x) = 0$.

1) Etudier les variations de v.

2) Montrer que l'équation (E) admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une unique solution r strictement positive. Préciser la valeur de r.

3) Discuter, selon les valeurs de a, le nombre de solutions réelles de (E). Donner leur valeur en fonction de a.

4) Montrer que, dans tous les cas, les solutions distinctes de r sont de valeur absolue inférieure strictement à 1.

Partie B.

On considère trois suites $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ définies par leur premier terme $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$

et les relations de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{5} y_n + \frac{1}{5} z_n \\ y_{n+1} = 4x_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{4} y_n \end{cases}$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z, 4x, \frac{1}{4}y\right)$.

1) Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Préciser f^{-1}.

3) On définit le vecteur colonne $V_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$. Exprimer V_n en fonction de A^n et de V_0.

Partie C.

On note S l'ensemble des suites réelles u vérifiant la relation de récurrence

$$(R): \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = a u_{n+1} + (1-a)\, u_n.$$

1) a) Montrer que S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) Soit x une solution réelle de (E). On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x^n$. Montrer que z est un élément de S.

2) On définit l'application Φ de S vers $\mathbb{R}^3$ par $\Phi(u) = (u_0, u_1, u_2)$.

a) Montrer que Φ est linéaire.

b) Soit u une suite de S. Montrer que si ses trois premiers termes sont nuls alors u est la suite nulle.

En déduire que Φ est injective.

c) Montrer que Φ est un isomorphisme.

d) Montrer que S est de dimension finie et préciser sa dimension.

3) On suppose que $\frac{3}{4} < a < 1$.

a) Trouver trois suites réelles convergentes de la forme $(x_1^n)_{n\geq 0}$, $(x_2^n)_{n\geq 0}$, $(x_3^n)_{n\geq 0}$, qui sont dans S et forment une base de S.

Donner x_1, x_2 et x_3 en fonction de a.

b) Montrer que toute suite de S est convergente.

4) On suppose que $a = \frac{3}{4}$

a) Montrer que la suite $\left(n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\geq 0}$ est un élément de S.

b) En déduire que toute suite de S est convergente.

5) (Application directe)

Soit u une suite réelle vérifiant $\begin{cases} u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = \frac{13}{8} \\ \forall n \in \mathbb{N}, 16u_{n+3} = 13u_{n+1} + 3u_n \end{cases}$

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Partie D.

On souhaite appliquer les résultats précédents aux trois suites $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ définies dans la partie B.

1) Calculer A^3 et montrer qu'il existe une constante réelle a telle que: $A^3 - aA - (1-a)\, I_3 = (0)$ où I_3 désigne la matrice identité et (0) désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Préciser a.

2) En déduire que les suites $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ vérifient la relation de récurrence (R) pour cette valeur de a.

3) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ convergent. On ne demande pas leur limite.

Fin du Problème.

Problème d'Analyse.

Partie A: Etude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que l'équation $x + 1 + \ln x = 0$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique α, comprise entre 0 et 1.

2) a) La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en ce point ?

   b) Etudier les variations de f, et préciser sa limite en $+\infty$.

   c) Soit (C) la courbe représentant f dans un repère orthonormé du plan. Déterminer les points d'intersection de (C) et de la droite d'équation $y = -x$. Représenter (C).

L'objet de la suite du problème est le calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,dx$, qu'on pourra noter $\int_0^1 \frac{x \ln x}{1+x}\,dx$.

Partie B: Limite d'une suite auxiliaire.

On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

1) Déterminer un réel a tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\pi} at^2 \cos nt\,dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

2) Exprimer la somme S_n à l'aide d'une intégrale.

3) Vérifier que, pour tout réel t différent de $2p\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$), $\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$.

4) On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(t) = \dfrac{t^2}{\sin\dfrac{t}{2}} & \text{si } t \in \ ]0,\ 2\pi[\\ g(0) = 0 \end{cases}$. Montrer que g est de classe C^1 sur $[0, 2\pi[$. .

5) a) Vérifier alors que $S_n = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\ dt$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, si h est une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$, on a:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\ dt\right| \le \frac{|h(0)|}{n+\dfrac{1}{2}} + \frac{\pi}{n+\dfrac{1}{2}} \times \max\left\{\left|h'(t)\right|, t \in [0,\pi]\right\}.$$

c) En déduire la limite de la suite (S_n).

Partie C: Application au calcul de l'intégrale I .

Pour tout entier $k \ge 1$, on considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$\begin{cases} f_k(x) = x^k \ln x \ \text{ si } x > 0 \\ f_k(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Etudier la continuité de f_1 sur $[0, 1]$.

b) Pour $k \ge 2$, montrer que f_k est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f_{k-1}

2) Pour tout entier $k \ge 1$, calculer l'intégrale $I_k = \int_0^1 f_k(x)\,dx$.

3) Montrer que $\left|I - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} I_k\right| \le m \times \int_0^1 x^n\,dx$, avec $m = \max\left\{f(t), t \in [0,1]\right\}$.

4) En déduire la valeur de I .

Fin du Problème.